Theorie der Ausflusszeiten einer Flüssigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Landesuniversität Rostock

ACAD. LAND BAT. BIBL.

vorgelegt

von

Hans Israel

Dipl. Ingenieur aus Berlin.

Rostock, im Juli 1905.

Referent:

Prof. Dr. **Wachsmuth.**

Meinem hochverehrten Vormunde

Herrn Rittergutsbesitzer Richard Israel

in Dankbarkeit

gewidmet.

Inhalt.

Seite

I. Kapitel. Geschwindigkeitsverhältnisse beim Ausströmen der Flüssigkeit . . . . . 7—16

II. Kapitel. Eigentliche Theorie der Ausflußzeiten 17—36

III. Kapitel. Kritik der unendlichen Ausflußzeit . 37—57

Anhang. Zusammenstellung der Ergebnisse. — Litteraturangabe. — Tafeln . . . . . 58—63

I. Kapitel.

Geschwindigkeitsverhältnisse beim Ausströmen der Flüssigkeit.

Ein Gefäß sei mit einer Flüssigkeit gefüllt, und wir bringen an der Gefäßwand irgendwo unterhalb der Niveaufläche eine Öffnung an, so sehen wir die Flüssigkeit ausfließen. Fragen wir zunächst, welchen dynamischen Gesetzen unterliegt der Vorgang des Ausfließens?

Um die für den Vorgang des Ausfließens in Frage kommenden Gesetze möglichst leicht erkennen zu können, gehe ich von speziellen Beispielen aus.

In Fig. 1 ist eine Röhre dargestellt, die bis zu dem Schieber A mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Auf der Niveaufläche laste der Druck p_0, unter dem Schieber ein kleinerer Druck p'. Der Schieber wird plötzlich so weit herausgezogen, daß er den gesamten Rohrquerschnitt freigibt. Die Flüssigkeit wird infolge der Anziehungskraft der Erde und des auf der Oberfläche lastenden Überdruckes $p_0 - p' = p$ die Röhre hinabgleiten. Bezeichnen wir die Beschleunigung durch die Erde mit g, die Zunahme der Geschwindigkeit in dem Zeitelement dt mit dv, so ist $g + \frac{p}{m} = \frac{dv}{dt}$ und $v = \frac{dx}{dt}$, wenn dx den in dem Zeit-

element dt zurückgelegten Weg der Masse m darstellt. Aus beiden Gleichungen ergibt sich $\left(g + \frac{p}{m}\right) dx = v\,dv$ und integriert

$$\left(g + \frac{p}{m}\right) \int_0^x dx = \int_0^{v_x} v\,dv,$$

$$2\left(g + \frac{p}{m}\right) x = v_x^2.$$

Würden wir den Überdruck p durch ein Gewicht P ersetzen, welches der Bewegung der Flüssigkeit folgen kann, so übt das Gewicht in der Ruhelage auf die Flüssigkeit einen Druck P aus. Öffnen wir jetzt den Schieber, so wirkt als beschleunigende Kraft g nach wie vor. P muß aber gleichfalls durch g beschleunigt werden, so daß P unabhängig von der Flüssigkeit dieselbe Bewegung ausführt; von einem Überdrucke kann jetzt nicht mehr die Rede sein. Besteht nun das Gewicht P aus einer zweiten Flüssigkeitssäule, so folgt auch diese unabhängig von der anderen der Fallbewegung, so daß wir, unter der notwendigen Einschränkung, daß sich die Gestalt der Flüssigkeitsmasse nicht verändern kann und wir von der Reibung an der Wand des Gefäßes absehen können, zu dem Resultate gelangt sind: „Die Flüssigkeit fällt wie ein fester Körper, unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitssäule, mit einer Geschwindigkeit, die der Quadratwurzel aus der Summe der beschleunigenden Kräfte und aus der durchfallenen Höhe proportional ist.“ Demnach erhalten wir für den Augenblick, wo die Oberfläche der Flüssigkeit den Schieber passiert, die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(g + \frac{p}{m}\right) H}. \quad \ldots \quad \text{Gl. 1.}$$

Für die folgende Untersuchung wollen wir dieselbe Röhre wie früher benutzen, nur mit dem Unterschiede, daß wir den Schieber A, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist, eine kurze Strecke hinausziehen und somit einen kleinen Querschnitt f zum Durchfließen der Flüssigkeit freigeben. Im Vergleich zu dem früheren Beispiele sehen wir jetzt den Flüssigkeitsspiegel langsam sinken, während der ausströmende Strahl eine beträchtliche Geschwindigkeit besitzt. Das Niveau sei bis zur Höhe x gesunken, und wir wollen für diesen Flüssigkeitsstand die Ausflußgeschwindigkeit berechnen. Bezeichnen wir den Rohrquerschnitt mit F, die Geschwindigkeit des sinkenden Niveaus mit v_0, die der ausfließenden Teilchen mit v, so ist in jedem Augenblicke $F\,v_0 = f\,v$, oder

$$v = \frac{F}{f}\,v_0,$$

mithin die Ausflußgeschwindigkeit größer als das Sinken des Niveaus. Hieraus folgt, daß die ausfließenden Teilchen einen Gewinn an kinetischer Energie zu verzeichnen haben, der aber, um das D'Alembertsche Prinzip von der Erhaltung der Energie nicht zu verletzen, auf Kosten einer potentiellen Energie gewonnen sein muß. Dieser Wert setzt sich aus der Höhe x und aus dem auf der Oberfläche lastenden Überdrucke $p_0 - p' = p$ zusammen. Diese Größe ist noch auf die Gewichtseinheit der Flüssigkeit zu reduzieren. Bezeichnen wir die Masse eines Flüssigkeitsteilchens mit m, so erhalten wir

$$mg\left(x + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{m\,v_0^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2}, \quad \ldots \quad \text{Gl. 2.}$$

worin γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet. Aus dieser Grundgleichung aller Aus-

flußbewegungen kann man durch Elimination von $v_0 = \frac{f}{F} v$ die Ausflußgeschwindigkeit v berechnen. Wir erhalten

$$v^2 \left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right) = 2g \left(x + \frac{p}{\gamma}\right),$$

oder

$$v = \sqrt{\frac{2g \left(x + \frac{p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{f^2}{F^2}}} \quad \ldots \ldots \text{Gl. 3.}$$

Ist der Ausflußquerschnitt f klein gegen den Gefäßquerschnitt, so kann man $f^2 : F^2$ gegen 1 vernachlässigen, und es ergibt sich

$$v = \sqrt{2g \left(x + \frac{p}{\gamma}\right)}.$$

Für den gewöhnlichen Fall ist der Überdruck $p = 0$, so daß die Gleichung übergeht in $v = \sqrt{2gx}$. In dieser vereinfachten Form hat das Gesetz schon Torricelli im Jahre 1644 erkannt und es folgendermaßen ausgesprochen: „Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Flüssigkeit die Öffnung verläßt, ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe der Flüssigkeit proportional, sie ist dieselbe, wie wenn die aus der Öffnung hervortretende Flüssigkeit die Höhe vom oberen Niveau bis zur Ausflußöffnung durchfallen hätte."

Diese Geschwindigkeit v wird in Wirklichkeit nicht erreicht, sondern durch die Reibung der Flüssigkeiten verringert. Wollen wir nun die dieser Geschwindigkeit entsprechende sekundliche Ausflußmenge Q bestimmen, so haben wir noch die Erscheinung der contractio venae durch Einführung eines Koeffizienten φ zu berücksichtigen. Be-

zeichnet μ den Reibungskoeffizienten, so erhalten wir $Q = \varphi \mu f \sqrt{2 g x}$. Für die späteren Untersuchungen ist in der Bezeichnung f für den Ausflußquerschnitt stets das Produkt $\varphi . \mu$ enthalten.

Befindet sich der Ausflußquerschnitt nicht in einer dünnen Wand, sondern fließt das Wasser, das wir nun häufiger als Flüssigkeit einführen werden, aus einer Ansatzröhre von geringem Durchmesser aus, so treten die Erscheinungen der Kapillarität auf, und der Ausfluß der Flüssigkeit unterliegt dem von Poiseuille erkannten Gesetze:

$$Q = \frac{\pi (p_a - p_e) r^4}{8 \mu l},$$

welches besagt: „Die Menge der ausfließenden Flüssigkeit ist der Differenz der Drucke am Anfange und Ende der Ansatzröhre, sowie der vierten Potenz des Radius der Röhre direkt, der Länge der Röhre und dem Koeffizienten der inneren Reibung dagegen umgekehrt proportional."

Ist die Ausflußöffnung nicht im Boden des Gefäßes, sondern in der Seitenwand desselben enthalten, so werden wir die Bestimmung der Ausflußmenge in jedem einzelnen Falle erst später vornehmen.

Für uns ist es jetzt von besonderem Interesse, die hydraulische Gleichung 3 auf ihre Allgemeingültigkeit hin zu untersuchen. Denn Gl. 3 gilt offenbar für jedes Querschnittsverhältnis f : F; jedenfalls ist in der Gleichung eine Einschränkung nicht enthalten. Setzen wir z. B. f = F, so wird nach Gl. 3 die Ausflußgeschwindigkeit $v = \infty$. Dies ist so zu verstehen, daß die Niveauhöhe h nach Fig. 2 durch Nachfüllen von Wasser konstant gehalten werden muß, bis die unendliche Ausflußgeschwindigkeit erreicht ist. Dies stimmt auch mit dem Fallgesetze

überein, welches für $f = F$ in Betracht kommt. Auch hier würde sich die Fallgeschwindigkeit größer und größer ergeben, bis sie unendlich geworden ist. Durch unendlich rasches Nachfüllen könnten wir dann die anfängliche Niveauhöhe konstant halten. Doch was geschieht, wenn wir den Wasserspiegel jetzt sich senken lassen? Wird die Geschwindigkeit noch größer als unendlich werden? Nach dem Fallgesetze sicherlich, denn einmal sehen wir von Widerständen sekundärer Art ab, und dann wirkt die Acceleration der Erde nach wie vor; auch die durchfallene Höhe H wächst. Doch was besagt die hydraulische Gleichung?: Die Geschwindigkeit nimmt mit sinkender Niveauhöhe h ab. Also gerade das Gegenteil! Wir wissen aber aus der Erfahrung, daß die Flüssigkeit für $f = F$ nach dem Fallgesetze sich beschleunigen muß, mithin ist dieser spezielle Fall, $f = F$, nach der hydraulischen Gleichung nicht bestimmbar.

Dieses Resultat muß für die Annahme einer Gültigkeit der hydraulischen Gleichung für alle übrigen Querschnittsverhältnisse $f : F < 1$ sofort Bedenken erregen. Denn da nach dem Fallgesetze für $f = F$ die Fallbeschleunigung g für das Sinken des Niveaus zugleich maßgebend ist, während nach der hydraulischen Gleichung der Wasserspiegel verzögert sinkt, so muß, da das hydraulische Gesetz für ein kleines Verhältnis $f : F$ gültig ist, irgend wann einmal die Fallbeschleunigung aufgezehrt sein und einem verzögerten Sinken des Wasserspiegels Platz gemacht haben. Dies kann aber nur für ein Querschnittsverhältnis $f : F$ der Fall sein, welches um einen endlichen Betrag kleiner als 1 ist. Durch Vordrücken des Schiebers A in Fig. 1 wird nur allmählich die Fallbeschleunigung aufgezehrt. Hiervon kann man sich durch den Versuch leicht überzeugen.

Es bliebe jetzt noch übrig, das Querschnittsverhältnis f : F festzulegen, bei welchem überhaupt erst ein Ausflußvorgang nach der hydraulischen Gleichung bestimmbar ist. Zu diesem Zwecke wollen wir folgende Überlegung anstellen: Ist in einem Systeme eine Beschleunigung möglich, so müssen die treibenden Kräfte, worunter auch der Energievorrat des Systems zu verstehen ist, größer sein als die der Bewegung des Systems entgegen wirkenden Kräfte, die wir als Widerstände bezeichnen. Dies ist offenbar bei dem Ausflußvorgange nach Fig. 1 der Fall, da der Wasserspiegel hier stets beschleunigt fällt. Den entgegengesetzten Zustand haben wir in dem Beispiel nach Fig. 2, wo sich der Wasserspiegel, durch Nachfüllen konstant gehalten, auf eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 einstellt, ohne eine Spur von Beschleunigung zu zeigen. Dann muß aber in diesem Ausflußprobleme irgendwo ein Widerstand enthalten sein, der das beschleunigte Sinken des Niveaus verhindert. Hierfür kommen an unserem Systeme Fig. 2 nur zwei Energiegrößen in Betracht; dies sind $\frac{m v^2}{2}$ und $m g h$. Der erste Wert kann als Widerstand nicht aufgefaßt werden, da er in Richtung der Energie des Systems wirkt. Somit verbleibt die potentielle Energie $m g h$ für die Erklärung eines an dem Systeme wirkenden Widerstandes; $m g h$ ist auch der einzige Wert, der durch das Vorrücken des Schiebers geschaffen wird, wenn wir für die folgenden Betrachtungen den Ausfluß in freier Atmosphäre vor sich gehen lassen oder den Überdruck $p : \gamma$ uns in h enthalten denken. So wären wir an das Ende unserer auf rein erkenntnistheoretischem Wege geführten Erwägungen gelangt und hätten jetzt noch den Grenzzustand mathematisch zu deuten.

Für den Fall eines Gleichgewichtes muß die treibende Kraft gleich dem Widerstande sein:

$$\frac{m\,v_0^2}{2} = m\,g\,h,$$

oder

$$h = \frac{v_0^2}{2\,g}.$$

Die Energiegröße $\frac{m\,v^2}{2}$ kommt für den Ansatz nicht in Betracht, da dieser Wert den Wasserteilchen innewohnt, denen ein Widerstand nicht mehr entgegen wirkt. Führen wir den Betrag für h in die hydraulische Grundgleichung nach Gl. 2 ein, wobei zu beachten ist, daß jetzt $x + \frac{p}{\gamma} = h$ ist, so erhalten wir:

$$\frac{m\,v^2}{2} = 2\,\frac{m\,v_0^2}{2},$$

oder

$$v = \sqrt{2}\,v_0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl. 4.}$$

Da sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte verhalten, so geht Gl. 4 über in

$$F = \sqrt{2}\,f,$$

oder

$$\mathbf{f : F = 1 : \sqrt{2}.}$$

Damit haben wir die uns gestellte Aufgabe gelöst, Gl. 4 enthält das Querschnittsverhältnis f : F, welches als die Grenze für die Bestimmung eines Ausflußvorganges nach der hydraulischen Gleichung 3 bezeichnet werden muß. Handelt es sich z. B. um den Ausflußvorgang aus einer zylindrischen Röhre von dem Querschnitte $F = \frac{D^2\,\pi}{4}$, der sich am unteren Ende der Röhre zu einer symmetrischen Öffnung

$f = \frac{d^2 \pi}{4}$ verjüngt, so ergibt sich aus Gl. 4

$$\frac{D^2 \pi}{4} = \sqrt{2}\ \frac{d^2 \pi}{4},$$

oder

$$D = \sqrt[4]{2}\, d$$

als die gesuchte Grenze.

Wir wenden uns jetzt dem in Fig. 3 veranschaulichten Probleme zu und wollen die maximale Ausflußgeschwindigkeit bei veränderlicher Röhrenlänge H feststellen.

Aus einem großen Gefäße von dem Querschnitte F und der Niveauhöhe h fließe das Wasser durch eine lange Röhre von konstantem Querschnitte f. Auf dem Oberwasserspiegel und an der Ausflußöffnung herrsche der Luftdruck p_0, und wir wollen ähnlich wie bei der Ermittelung der Gl. 2 den hydraulischen Druck an einem Querschnitte der Röhre berechnen, der um die Höhe x über der Ausflußöffnung liege. Bezeichnen wir den hydraulischen Druck mit $\frac{p}{\gamma}$ und die Ausflußgeschwindigkeit mit v, so ergibt sich

$$\frac{p}{\gamma} + x + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

oder

$$p = p_0 - \gamma x.$$

Der hydraulische Druck wird also um so kleiner, je größer x ist, und schließlich $p = 0$ für $p_0 = \gamma x$. Der Luftdruck p_0 sei durch eine Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und 0^0 Temperatur gegeben. Das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist 13,596, so daß wir erhalten $0{,}76 \cdot 13{,}596 = 10{,}333$ Meter Wassersäule für den wirksamen Luftdruck. Für diesen Wert von x wird der hydraulische Druck gleich Null. Ist

nun die Länge der Röhre $H > x$, so reißt der Wasserfaden ab, und das Wasser fällt bis zu dem Querschnitte für $p = 0$ frei herab. Wir haben daher durch diese Röhre den Luftdruck an der Ausflußöffnung c beseitigt und den sich in Geschwindigkeit umsetzenden Druck auf die Größe $h + \frac{p_0}{\gamma}$ gebracht, woraus sich die zu erreichende maximale Geschwindigkeit ergibt:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\gamma}\right)}.$$

Diese Erscheinung, oberhalb x der Röhre ein Vakuum zu erhalten, benutzt man, um Räume zu evakuieren. Zu diesem Zwecke bringt man oberhalb x von dem zu entleerenden Raume ein Zuleitungsrohr an, durch welches von der strömenden Flüssigkeit die Luft mitgerissen wird. So hat Sprengel eine Quecksilberluftpumpe konstruiert, bei welcher die Röhre nur eine Länge von 760 mm haben muß. Bunsen hat dann diesen Apparat in eine Wasserpumpe umgewandelt, mit welcher man große Räume bequemer evakuieren kann, die aber den Nachteil hat, daß man bei 8 Meter Länge der Röhre erst ein Vakuum von 0,25 Atmosphären erreicht.

II. Kapitel.

Eigentliche Theorie der Ausflufszeiten.

Bei der Untersuchung des Ausflußproblems nach Fig. 1 waren wir zu dem Resultate gelangt, daß die Flüssigkeit sich nach dem Fallgesetze fortbewegt und zwar mit einer momentanen Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(g + \frac{p}{m}\right)x} = dx : dt.$$

Hieraus bestimmt sich die Ausflußzeit zwischen den Grenzen x_0 und x

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\left(g + \frac{p}{m}\right)x}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(g + \frac{p}{m}\right)}} \left\{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right\}.$$

Wollen wir die Gesamtausflußzeit berechnen, so gehen die Grenzen x_0 in Null und x in H über, und wir erhalten

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g + \frac{p}{m}}}.$$

Dieses Gesetz wurde schon von Galilei durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ gedeutet.

Wir wenden uns jetzt dem in Fig. 2 dargestellten Beispiele zu, in welchem der Gefäßquerschnitt F gegenüber der Bodenöffnung groß genug sei, um das

Verhältnis $f^2 : F^2$ gegen 1 vernachlässigen zu können. Ferner wollen wir der Einfachheit wegen den Ausfluß unter freier Atmosphäre vor sich gehen lassen, so daß sich die Ausflußgeschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkte zu $v = \sqrt{2\,g\,x}$ ergibt. In dem Zeitelement dt sei der Wasserspiegel um dx gesunken; dann muß offenbar sein

$$f\sqrt{2\,g\,x}\,dt = -F\,dx$$

und zwar negativ, da x mit wachsendem t abnimmt. Wir integrieren und erhalten

$$t = -\int_h^x \frac{F\,dx}{f\sqrt{2\,g\,x}} = \frac{2\,F}{f\sqrt{2\,g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{x}\right\}.$$

Führen wir die Integration für $x = 0$ aus, also für die völlige Entleerung, so erhalten wir

$$T = \frac{2\,F}{f\sqrt{2\,g}}\sqrt{h} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 2.}$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem in Gl. 1 enthaltenen, so sieht man leicht, daß sich die Ausflußzeiten bis auf das Verhältnis $F : f$ gleichen, wenn man auch für die Entwickelung der Gl. 1 von einem Überdrucke p absieht. Ist also $H = h$, so erhalte ich für ein Ausflußproblem nach Fig. 2 dieselbe Ausflußzeit, wenn ich die einzelnen Wassersäulen von dem Querschnitte f, die in dem Gefäßquerschnitte F enthalten sind, hintereinander fallen lassen würde.

Wir wollen uns jetzt dem in Fig. 4 dargestellten Beispiele zuwenden, welches sich von den früheren hauptsächlich dadurch unterscheidet, daß der in der Seitenwand des Gefäßes befindliche Ausflußquerschnitt mit sinkendem Niveau variabel ist. Um für ein solches Problem die Ausflußzeit zu bestimmen, müssen wir zunächst die Wassermenge Q berechnen, die bei

einem konstant gehaltenen Wasserspiegel x pro Sekunde ausströmt. Es ist

$$dQ = b\,dz\sqrt{2gz},$$

oder

$$Q = b\sqrt{2g}\int_0^x z^{1/2}\,dz = \frac{2}{3}b\,x\sqrt{2gx}.$$

Jetzt lassen wir das Niveau bei x sinken und bestimmen die Ausflußmenge in dem Zeitelement dt, indem wir beachten, daß $dQ = -F\,dx$ ist; dann folgt

$$\frac{2}{3}b\,x\sqrt{2gx}\,dt = -F\,dx,$$

oder

$$t = \frac{3F}{2b\sqrt{2g}}\int_x^h \frac{dx}{x^{3/2}},$$

$$t = \frac{3F}{b\sqrt{2g}}\left[-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_x^h.$$

Hieraus bestimmt sich die Gesamtausflußzeit für $x = 0$

$$T = \frac{3F}{b\sqrt{2g}}\left\{\infty - \frac{1}{\sqrt{h}}\right\} \quad \text{Gl. 3.}$$

Die Ausflußzeit ist unendlich groß. Bei der Behandlung des Problems nach Fig. 2 ergab sich ein endliches Resultat. Es kann daher nicht wundernehmen, wenn man für diese beiden in ihrer Art verschiedenen Resultate nach einer Erklärung gesucht hat. So äußert sich über diesen Fall Wilh. Keck in seiner „Mechanik elastisch fester und flüssiger Körper“ (II. Teil, S. 254) folgendermaßen: „Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert

sich nur asymptotisch der Unterkante. Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung ergab sich für völlige Entleerung ein endlicher Zeitwert. Der Grund der Verschiedenheit ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundliche Ausflußmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine, noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfließen. Bei der Seitenöffnung aber wird mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfließenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflußmenge aber unendlich klein zweiter Ordnung, so daß zum Ausfließen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich große Zeit nötig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die noch vorhandene Wasserschicht so dünn, daß sie tatsächlich nicht mehr fließt.“

Diese Erwägungen wären überzeugend, wenn eine physikalische Voraussetzung, die wir bei der Integration angenommen haben, berechtigt wäre, auch in Wirklichkeit von der Natur befolgt würde, nämlich die Konstanz der Bodenöffnung bis zum Schluß des Ausfließens. Dies ist aber nicht der Fall, wie ich sogleich und zwar rein theoretisch, ohne auf Nebenumstände, wie Reibung und Adhäsion, Rücksicht zu nehmen, beweisen werde. Kecks Bemerkung: „Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die noch vorhandene Wasserschicht so dünn, daß sie tatsächlich nicht mehr fließt“, muß vielmehr auf ein Analogon zwischen beiden Fällen einer Boden- und einer Seitenöffnung führen; denn auch bei der ersteren wird nach dem Beispiel Fig. 2 die Wasserschicht unendlich dünn; wie soll diese dann noch eine endliche Öffnung ausfüllen? Diese einfache Überlegung führt zu dem notwendigen Ergebnis, daß die Ausflußzeit auch bei dem

Gefäße mit einer Bodenöffnung unendlich groß sein muß. Da aber der Querschnitt der Bodenöffnung f in den ersten Stadien des Ausflusses offenbar konstant ist, wie auch mathematisch richtig angenommen ist, so muß es eine Grenze geben, bis zu welcher dies der Fall ist. Wir durften also Gl. 2 niemals erhalten, müssen sie vielmehr als falsch erklären, da wir für ihre Entwickelung die Bodenöffnung bis zum Schlusse des Ausfließens als konstant angenommen haben. Um nun die Grenze, bei welcher sich die Bodenöffnung für den Ausfluß als nicht mehr ausfüllbar erweisen wird, aus der Anschauung erkennen zu können, wollen wir Fig. 5 betrachten, in welcher der Grenzzustand gezeichnet ist und zwar der Deutlichkeit wegen in einem größeren und symmetrischen Verhältnisse. Das Gefäß habe wieder einen konstanten Querschnitt F und im Boden eine zylindrische Öffnung von dem Durchmesser d. Die Niveaufläche des Wassers ist nicht mehr eben gezeichnet, da dasselbe offenbar in der durch die eingezeichneten Pfeile markierten Richtung strömt und in jedem Augenblicke nur einen zu dieser Richtung senkrechten Querschnitt ausfüllen kann, der dem zuerst durchflossenen, durch Kräuselung hervorgehobenen Querschnittsumfang der Bodenöffnung stets gleich ist, weil das Wasser, den Umfang der Bodenöffnung überspülend, frei herabfällt. Ist also

$$h\,d\,\pi = \frac{d^2\,\pi}{4},$$

oder

$$h = \frac{d}{4},$$

so wird der Bodenquerschnitt noch ausgefüllt. Ist der Niveaustand bis zu der Höhe h_1 gefallen, so

wird von der Bodenöffnung vielleicht nur der Ringquerschnitt

$$\frac{d^2\pi}{4} - \frac{d_1^2\pi}{4} = h_1\, d\,\pi$$

ausgefüllt. Nachdem die Wasserschicht bis zu dem Höhenelement dh abgenommen hat, muß auch der Ringquerschnitt sich bis zu einem Flächenelement verringert haben. Damit ist aber zugleich gezeigt, daß der von dem ausfließenden Wasser erfüllte Querschnitt bis zu Null abnehmen wird. Allgemein ergibt sich der Grenzzustand für die konstante Ausfüllung der Bodenöffnung, wenn wir den Umfang derselben mit u bezeichnen,

$$\mathbf{h = f : u.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl. 4.}$$

Wollen wir also die Ausflußzeit einer Flüssigkeit zwischen zwei Grenzen berechnen, die ober- und unterhalb des Grenzzustandes nach Gl. 4 liegen, so haben wir noch zu beachten, daß während der zweiten Ausflußperiode der sinkende Wasserquerschnitt F — f ist, und erhalten durch Kombination früherer Entwickelungen

$$\mathbf{t = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{\frac{f}{u}}\right\} + \frac{3(F-f)}{u\sqrt{2g}}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{u}{f}}\right\}.} \quad \text{Gl. 5.}$$

Hieraus folgt die Gesamtausflußzeit für $x = 0$, $T = \infty$. Damit ist aber die Analogie der Beispiele nach Fig. 2 und 4 nachgewiesen.

Bevor ich zu einem neuen Probleme übergehe, möchte ich noch die Kurven feststellen, nach denen sich der Wasserspiegel unter Berücksichtigung des Grenzzustandes nach Gl. 4 senken wird. Der erste Teil der Ausflußperiode folgt dem Gesetze

$$t = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}\sqrt{x}.$$

Bezeichnen wir t mit y und den konstanten Faktor mit $\sqrt{2p}$, so geht die Gleichung über in $y^2 = 2px$, wodurch eine Parabel charakterisiert ist.

Für den zweiten Teil der Ausflußperiode hatten wir gefunden

$$t = \frac{3(F-f)}{u\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{x'}}.$$

Setzen wir t wieder gleich y und den konstanten Faktor gleich $\sqrt{a}$, so nimmt die Gleichung die Form an $x' y^2 = a$; dies ist die Gleichung einer Hyperbel dritten Grades. In Fig. 6 ist ein Schaubild des sinkenden Wasserspiegels dargestellt; die Abszisse $\overline{OA}$ würde die bisher angenommene Ausflußzeit darstellen.

Nachdem es sich gezeigt hat, daß auch ein Gefäß mit einer Bodenöffnung eine unendliche Ausflußzeit bedingen kann, so liegt die Frage nahe, wo die Ursache einer solchen Erscheinung zu suchen ist. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Bestimmung der Ausflußzeiten für verschiedene Gefäßformen vornehmen, eine Aufgabe, die wir im dritten Kapitel erledigen wollen.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, bei welchem die Ausflußöffnung unterhalb des Wasserspiegels liegt, aber in der Seitenwand des Gefäßes, wie in Fig. 7 dargestellt. Wir bestimmen zunächst die Wassermenge, welche bei konstantem Niveau x durch die Seitenöffnung ausströmt. Es ist

$$dQ = c\,dz\sqrt{2gz};\quad Q = c\sqrt{2g}\int_x^{x+b} z^{1/2}\,dz,$$

$$Q = \frac{2}{3} c\sqrt{2g}\left\{(x+b)^{3/2} - x^{3/2}\right\}.$$

Hieraus bestimmt sich wie früher

$$-F\,dx = \frac{2}{3}\,c\sqrt{2g}\left\{(x+b)^{3/2} - x^{3/2}\right\}dt,$$

$$t = \frac{3F}{2c\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{dx}{(x+b)^{3/2} - x^{3/2}},$$

wenn wir den Ausflußvorgang bei variabeler Seitenöffnung als erledigt betrachten. Dieses Integral ist durch Reihenentwickelung umständlich zu lösen, zumal die Glieder schlecht konvergieren, und wenn man bedenkt, daß dieses Beispiel das einfachste analoger Fälle ist, so muß man auf die obige Art der Lösung verzichten. Wir führen deshalb in Fig. 8 den Schwerpunkt S der Öffnung, der um z_0 unter dem Wasserspiegel x liegt, als Ausgangspunkt ein. Dann entspricht dem Querschnittselement df in der Tiefe u unter dem Schwerpunkte eine Druckhöhe $z = z_0 + u$. Hieraus bestimmt sich

$$dQ = df\sqrt{2gz} = df\sqrt{2gz_0}\left\{1 + \frac{u}{z_0}\right\}^{1/2},$$

$$dQ = df\sqrt{2gz_0}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{u}{z_0} - \frac{1}{8}\,\frac{u^2}{z_0^2} \pm \ldots\right\}.$$

Ist die Höhe der Öffnung $b \leq \frac{1}{2} z_0$, so wird, wenn der Schwerpunkt in der Mitte der Höhe liegt, der größte Wert von $u \leq \frac{1}{4} z_0$, mithin $\frac{1}{8}\,\frac{u^2}{z_0^2} \leq \frac{1}{128}$, also so klein, daß man bei praktischen Anwendungen das dritte Glied der Reihe vernachlässigen kann. Benutzt man daher nur die beiden ersten Glieder der Reihe, so wird

$$dQ = df\sqrt{2gz_0}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{u}{z_0}\right\},$$

oder

$$Q_1 = \sqrt{2\,g\,z_0}\left\{\frac{f}{2} + \frac{1}{4\,z_0}\int u\,df\right\}.$$

Dieselbe Entwickelung wird für $z = z_0 - u$ für die obere Hälfte der Öffnung durchgeführt, und man erhält durch Addition

$$Q = f\sqrt{2\,g\,z_0} \quad \ldots\ldots \quad \text{Gl. 6.}$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige Gleichung ist also anwendbar, wenn der Schwerpunkt um die doppelte Höhe der Öffnung unter Wasser liegt.

Da aber bei der Entleerung eines Gefäßes diese Grenze einmal überschritten wird, so kann man die Vernachlässigung des dritten Gliedes der Reihe nicht mehr als zulässig erachten, und wir werden von vornherein zur genauen Formel greifen müssen.

Wir erhalten dann durch Addition der beiden unendlichen Reihen

$$dQ = c\sqrt{2\,g\,z_0}\left\{2 - \frac{1}{4}\frac{u^2}{z_0^2} - \frac{5}{64}\frac{u^4}{z_0^4} - \frac{21}{512}\frac{u^6}{z_0^6} - \ldots\right\} du;$$

$$Q_{z_0} = c\sqrt{2\,g\,z_0}\left[\,2\,u - \frac{1}{2^2\cdot 3}\frac{u^3}{z_0^3} - \frac{1}{2^6}\frac{u^5}{z_0^4} - \frac{3}{2^9}\frac{u^7}{z_0^7} - \ldots\right]_0^b.$$

Hieraus bestimmt sich die Ausflußzeit:

$$-F\,dz_0 = Q_{z_0}\,dt,$$

oder

$$t = \int_b^{a+b} \frac{F\,dz_0}{Q_{z_0}}.$$

Zunächst ist die Reihe für Q_{z_0} in den Zähler zu entwickeln.

Der Faktor 2b ist vor die Klammer genommen, und wir erhalten

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \int_b^{a+b} \frac{1}{\sqrt{z_0}} \left\{1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} \frac{b^2}{z_0^2} + \frac{11}{2^7 \cdot 3^2} \frac{b^4}{z_0^4} + \frac{101}{3^3 \cdot 2^{10}} \frac{b^6}{z_0^6} + \ldots\right\} dz_0,$$

oder

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \left[2\sqrt{z_0} - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \frac{b^2}{z_0^{3/2}} - \frac{11}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7} \frac{b^4}{z_0^{7/2}} - \frac{101}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 11} \frac{b^6}{z_0^{11/2}} - \ldots\right]_b^{a+b} \quad \ldots \text{ Gl. 7.}$$

Nach Einsetzen der Grenzen ist die Ausflußzeit zu berechnen. Aus dem Resultate ersieht man, daß die Ausflußzeit kleiner ist, als wenn man die vereinfachte Gl. 6 für die Wassermenge benutzt hätte. Die resultierende Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers liegt unterhalb der arithmetischen Mitte der Öffnung.

Die Gesetzmäßigkeit der Koeffizienten der Reihe ist nur schwer festzustellen, und weitere Glieder sind durch die Entwickelung aus dem Nenner in den Zähler schwierig auszurechnen. Aus diesem Grunde möchte ich ein allgemeines Verfahren angeben, welches mit Leichtigkeit den Wert der laufenden Koeffizienten erkennen läßt.

Gegeben sei eine unendliche, gleichmäßig konvergierende Reihe

$$1 + a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + \ldots,$$

und gefragt sei nach den Koeffizienten der folgenden Glieder, ohne daß die Gesetzmäßigkeit zu ermitteln sei. Dann trägt man die Koeffizienten a, b, c, d ... in gleichen Abständen als Ordinaten nach Fig. 9 auf

und verbindet die Punkte durch eine Kurve. Die Gesetzmäßigkeit der Reihe ist durch die stetige Kurve gegeben. In den meisten Fällen werden die Koeffizienten so stark abnehmen, daß ein Ablesen derselben nicht mehr möglich ist. Dann hat man die Verhältniswerte zweier aufeinander folgender Koeffizienten zu bestimmen und diese fortlaufend, wie aus der Figur ersichtlich, aufzutragen.

So kann man bei beliebiger Verlängerung der Kurve durch sukzessives Ausrechnen die folgenden Koeffizienten mit hinreichender Genauigkeit bestimmen.

Im folgenden wenden wir uns einem neuen Ausflußprobleme zu, indem wir wieder Fig. 2 benutzen und während des Ausfließens eine bestimmte Wassermenge $q = f\sqrt{2gc}$ zufließen lassen. Wir wollen feststellen, wann die Niveauhöhe, die der Zuflußmenge entspricht, erreicht wird.

In dem Zeitelement dt sei durch die Senkung des Wasserspiegels F dx ausgeflossen während eines Zuflusses q dt. Es muß daher sein

$$q\,dt - F\,dx = f\sqrt{2gx}\,dt,$$

oder

$$t = F\int_h^c \frac{dx}{f\sqrt{2gx} - q}.$$

Zum Zwecke der Integration setze man

$$f\sqrt{2gx} = q\,z;\quad x = \frac{q^2 z^2}{f^2 2g};\quad dx = \frac{2q^2 z\,dz}{f^2 2g}.$$

Dann erhält man

$$t = \frac{2qF}{f^2 2g}\int \frac{z\,dz}{z-1},$$

und setze $z = u + 1$; $dz = du$. Dies gibt

$$t = \frac{2\,q\,F}{f^2\,2\,g} \int \left\{ du + \frac{du}{u} \right\},$$

oder ausgeführt

$$t = \frac{2\,q\,F}{f^2\,2\,g} \left\{ u + \ln u \right\},$$

$$t = \frac{2\,q\,F}{f^2\,2\,g} \left\{ z - 1 + \ln (z - 1) \right\},$$

$$t = \frac{2\,q\,F}{f^2\,2\,g} \left[\sqrt{\frac{x}{c}} - 1 + \ln \left(\sqrt{\frac{x}{c}} - 1 \right) \right]_h^c.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird das letzte Glied für $x = c$ unendlich. Der Wasserspiegel nähert sich also nur asymptotisch der Höhe c, die dem Zuflusse der Wassermenge q entspricht.

In Fig. 10 sind zwei durch eine kleine Öffnung f kommunizierende Gefäße dargestellt von gleichem Querschnitte F. Das linke Gefäß sei bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllt, während das rechte leer ist. Wir wollen zusehen, wann ein Ausgleich der Wasserspiegel in beiden Gefäßen stattgefunden hat.

Der resultierende Überdruck zu einer beliebigen Zeit sei z. Dann erhalten wir wie früher

$$- F\,dx = f \sqrt{2\,g\,z}\,dt.$$

Zum Zwecke der Integration drücken wir z durch x aus: $z = h - 2\,(h - x) = 2\,x - h$ und erhalten

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2\,g}} \int_{\frac{h}{2}}^{h} \frac{dx}{\sqrt{2\,x - h}},$$

oder

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2\,g}} \left[\sqrt{2\,x - h} \right]_{\frac{h}{2}}^{h};$$

mithin

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Die Ausgleichzeit ist also dieselbe, als wenn die im rechten Gefäße enthaltene Flüssigkeit ausfließen würde, indem wir von dem Eintreten des Grenzzustandes nach Gl. 4 absehen. Der Ausflußquerschnitt ist dann im Boden des Gefäßes zu denken.

Wir hatten früher nach Fig. 6 die Kurven festgestellt, nach denen der Wasserspiegel sich senkt, und gefunden, daß der erste Teil dem Gesetze einer Parabel, der zweite dem einer Hyperbel folgt. Wir wollen jetzt die Gefäßformen ermitteln, bei welchen der Wasserspiegel mit konstanter Geschwindigkeit sinkt. Bezeichnen wir zwei Gefäßquerschnitte mit F_h und F_x, so folgt nach Fig. 11

$$v_0 = \frac{f\sqrt{2gx}}{F_x} = \frac{f\sqrt{2gh}}{F_h},$$

oder

$$F_h : F_x = \sqrt{h} : \sqrt{x} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 8.}$$

Der Querschnitt des Gefäßes sei zunächst ein Rechteck von der konstanten Länge l. Dann geht die Gleichung über in

$$2bl : 2yl = \sqrt{h} : \sqrt{x},$$

oder

$$b^2 : y^2 = h : x.$$

Dies ist aber die Verhältnisgleichung zweier Punkte, die auf einer gewöhnlichen Parabel liegen. Die Ausflußzeit für ein solches Gefäß berechnet sich folgendermaßen:

$$t = \frac{F_x}{f\sqrt{2gx}} \int_x^h dx.$$

Der Faktor vor dem Integral bildet zusammengefaßt eine Konstante. Die Gesamtausflußzeit wird daher

$$T = \frac{F_x\, h}{f \sqrt{2 g x}} = 2 \frac{l}{f} \sqrt{\frac{p}{g}}\, h.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, wenn man

$$2 \frac{l}{f} \sqrt{\frac{p}{g}} = \operatorname{tg} \alpha$$

setzt.

Statt des rechteckigen Gefäßquerschnittes wollen wir jetzt einen kreisförmigen wählen und die Kurve bestimmen, nach welcher sich dieser Querschnitt verjüngen muß, um ein gleichmäßiges Sinken des Niveaus zu bewirken. Unter Benutzung von Gl. 8 erhält man

$$b^2 \pi : y^2 \pi = \sqrt{h} : \sqrt{x},$$

oder

$$b^4 : y^4 = h : x.$$

Durch diese Proportion wird eine Gleichung der Parabel vierten Grades charakterisiert. Die Ausflußzeit berechnet sich in derselben Weise wie bei dem früheren Beispiele:

$$T = \frac{\pi}{f} \sqrt{\frac{p}{g}}\, h.$$

Bei beiden Beispielen habe ich auf das Eintreten der Grenzzustände $v = \sqrt{2}\, v_0$ nach Kap. I, Gl. 4 und $h = f : u$ nach Gl. 4 keine Rücksicht genommen.

Die soeben besprochenen Gefäßformen werden für Wasseruhren benutzt, indem bei gleichmäßiger Skaleneinteilung der Stand des Wassers die verflossene Zeit angibt. Bekannt sind die Sanduhren, die den Vorzug haben, daß sie oben verschlossen sein können. Bei der Berechnung der Ausflußzeit ist

zu beachten, daß bei Verwendung von Sand ein Kontraktionskoeffizient nicht einzuführen ist.

Ein in der Praxis viel benutztes Gefäß ist der Kegel nach Fig. 12, dessen Ausflußzeit sich, wie folgt, bestimmt:

$$-F_x\,dx = f\sqrt{2gx}\,dt.$$

Es ist aber $F_x = y^2\pi$ und $y : R = x : h$.
Dies eingesetzt ergibt

$$-\frac{R^2}{h^2}x^2\pi\,dx = f\sqrt{2gx}\,dt,$$

$$t = \frac{R^2\pi}{h^2 f\sqrt{2g}}\int_x^h x^{3/2}\,dx,$$

oder

$$t = \frac{R^2\pi}{h^2 f\sqrt{2g}}\cdot\frac{2}{5}\left\{h^{5/2} - x^{5/2}\right\};$$

und

$$T = \frac{2R^2\pi\sqrt{h}}{5f\sqrt{2g}}.$$

Im Anschlusse hieran sei noch die Ausflußzeit einer Kugel berechnet (Fig. 13):

$$-F_x\,dx = f\sqrt{2gx}\,dt,$$

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

$$t = \frac{\pi}{f\sqrt{2g}}\left\{\int_x^{2r} 2rx^{1/2}\,dx - \int_x^{2r} x^{3/2}\,dx\right\},$$

oder

$$t = \frac{\pi}{f\sqrt{2g}}\left[2r\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_x^{2r};$$

und

$$T = \frac{4D^{5/2}\pi}{15f\sqrt{2g}}.$$

Wir wollen jetzt einen Kegel nach Fig. 14 bei einem konstanten Niveau h eines kommunizierenden Gefäßes mit Flüssigkeit füllen und die dazu erforderliche Zeit berechnen.

Es ist

$$-F\,dx = f\sqrt{2g(h-x)}\,dt,$$

$$y : R = (h-x) : h,$$

mithin

$$-\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2\,dx = f\sqrt{2g(h-x)}\,dt,$$

$$t = \frac{\pi R^2}{h^2 f\sqrt{2g}}\int_x^h (h-x)^{3/2}\,dx,$$

oder

$$t = -\frac{R^2\pi}{h^2 f\sqrt{2g}}\left[\frac{2}{5}(h-x)^{5/2}\right]_x^h;$$

und

$$T = \frac{2R^2\pi\sqrt{h}}{5f\sqrt{2g}}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem für die Ausflußzeit eines auf der Spitze stehenden Kegels vollkommen überein, so daß wir hiernach allgemein schließen können: „Wird ein Gefäß durch ein anderes von unendlicher Größe und einer dem ersteren gleichen Höhe kommunizierend gefüllt, so ist die Füllzeit gleich der Ausflußzeit des um 180° gedrehten Gefäßes.“

Bei den bisherigen Problemen haben wir stets den Ausfluß von Flüssigkeiten bei einem auch an der Niveaufläche geöffneten Gefäße betrachtet. Wir wollen jetzt die Ausflußzeit einer Flüssigkeit bestimmen, welche mit einer Luftmenge von der Atmosphäre allseitig abgeschlossen ist und durch eine kleine Bodenöffnung ausströmt.

In Fig. 15 ist ein zylindrisches Gefäß von dem konstanten Querschnitte F dargestellt, welches im Boden eine sehr feine Öffnung besitzt, damit das Eintreten von Luftblasen während des Ausfließens verhindert wird. Das Gefäß ist bis zur Höhe b mit Wasser gefüllt, über welchem sich eine Luftsäule a befindet, deren Anfangsspannung gleich dem äußern Luftdruck p_0 ist. Bei der so bestimmten Gefäßhöhe H wird das Wasser bis zu einem Minimalniveau n ausfließen, welches wir zunächst berechnen wollen.

Nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze folgt $a F p_0 = m F p$, wenn p dem Drucke entspricht, der bei dem erreichten Niveau n herrscht. Der Druck p wird um den Höhendruck n kleiner sein als der äußere Luftdruck, um mit diesem im Gleichgewicht zu sein. Es muß daher sein

$$p + n = p_0;\ m = \frac{a\,p_0}{p_0 - n},$$

oder

$$(H - n)\,(p_0 - n) = a p_0,$$

$$n^2 - n\,(H + p_0) + p_0 H = a p_0,$$

$$\left(n - \frac{H + p_0}{2}\right)^2 = a p_0 - H p_0 + \left(\frac{H + p_0}{2}\right)^2,$$

$$n = -\sqrt{\left(\frac{H + p_0}{2}\right)^2 - b p_0} + \frac{H + p_0}{2} \quad \text{Gl. 9.}$$

Das Minus-Vorzeichen der Wurzel ergibt sich aus der Überlegung, daß n gleich Null werden muß, wenn b oder p_0 zu Null angenommen wird. Für den Fall b = H wird $n = p_0$, was wir schon am Ende des ersten Kapitels festgestellt hatten.

Es fragt sich nun, in welcher Zeit dieser niedrigste Wasserstand für ein bestimmtes Füllungsverhältnis erreicht wird. Zu diesem Zwecke setzen

wir ähnlich wie früher an und beachten, daß für das Niveau x der wirksame Druck gleich $x - (p_0 - p_x)$ ist:

$$-F\,dx = f\sqrt{2g\left\{x-(p_0-p_x)\right\}}\,dt.$$

Wir drücken p_x durch x aus:

$$ap_0 = (H-x)\,p_x;\quad p_x = \frac{ap_0}{H-x}.$$

$$x-(p_0-p_x) = x-p_0+\frac{ap_0}{H-x}$$

$$= \frac{-x^2+x(H+p_0)-b\,p_0}{H-x}$$

$$= -\frac{\left(x-\frac{H+p_0}{2}\right)^2-\left(\frac{H+p_0}{2}\right)^2+b\,p_0}{H-x}.$$

Wir setzen $(H+p_0)^2 - bp_0 = e$ und erhalten

$$t = \frac{F}{f\sqrt{2g}}\int_n^b \frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{e-\left(x-\frac{H+p_0}{2}\right)^2}}\,dx.$$

Die Integration ist durch Reihenentwickelung auszuführen, indem wir aus der oberen Wurzel H und aus der unteren e herausziehen. Den konstanten Faktor bezeichnen wir mit B; dann geht das Integral über in

$$t = B\int_n^b \frac{\sqrt{1-\frac{x}{H}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{H+p_0}{2}}{\sqrt{e}}\right)^2}}\,dx.$$

Die Konvergenzbedingung der binomischen Reihe ist in der oberen Wurzel erfüllt. Um die untere auf die Konvergenz zu prüfen, haben wir für x die Grenzwerte b und n einzusetzen.

Es muß also sein

$$\frac{(2\,x - (H + p_0))^2}{(H + p_0)^2 - 4\,b\,p_0} < 1.$$

Wir setzen $x = b$, und erhalten

$$\frac{(H + p_0)^2 - 4\,b p_0 - 4\,b\,H + 4\,b^2}{(H + p_0)^2 - 4\,b\,p_0}.$$

Der Zähler ist mithin kleiner als der Nenner, da $-4\,b\,H + 4\,b^2$ stets negativ ist.

Wir setzen $x = n$, welcher Wert durch Gl. 9 definiert ist, und erhalten

$$\frac{\left\{2\left(-\sqrt{\left(\frac{H + p_0}{2}\right)^2 - b\,p_0} + \frac{H + p_0}{2}\right) - (H + p_0)\right\}^2}{(H + p_0)^2 - 4\,b\,p_0}.$$

Dies gibt ausgerechnet den Wert 1, so daß für die Grenze $x = n$ nur das Integral der Reihe konvergiert.

Wir bezeichnen $\frac{x}{H}$ mit ε und den entsprechenden Faktor der Wurzel im Nenner mit ε', so ergibt sich

$$t = B \int_n^b \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon'}}\,dx,$$

oder

$$t = B \int_n^b \left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\,\varepsilon^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\,\varepsilon^3 - \frac{1}{2^4 \cdot 4!}\,\varepsilon^4 - \ldots\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon' + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\,\varepsilon'^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\,\varepsilon'^3 + \ldots\right) dx.$$

Die beiden Reihen sind bis zu einem beliebigen Genauigkeitsgrade zu multiplizieren und nach Einsetzen der Werte für ε und ε' die Integrale zu lösen.

Die Erscheinung, daß bei einer bestimmten Luftverdünnung im Innern des Gefäßes eine ganz bestimmte Wasserhöhe durch den äußeren Luftdruck äquilibriert wird, finden wir bei der Mariotteschen Flasche wieder. Eine in das Gefäß bis zu der Tiefe n eingeführte Röhre läßt beim Ausfließen des Wassers durch den entstehenden Unterdruck Luftblasen in das Innere steigen, bis an der Stelle n wieder Atmosphärendruck herrscht. Wir erhalten dann in jedem Augenblicke eine Wassermenge $Q = f\sqrt{2gn}$ geliefert.

III. Kapitel.

Kritik der unendlichen Ausflufszeit.

Wir wollen uns in diesem Kapitel die Aufgabe stellen, das Wesen der unendlichen Ausflußzeit zu ergründen, so daß wir bei einem gegebenen Gefäße von vornherein in der Lage sind, uns darüber entscheiden zu können, ob die Ausflußzeit eine endliche oder unendliche sein wird. Diese Frage konnte bisher nicht beantwortet werden, da man die Ausflußzeit eines Gefäßes nach Fig. 2 für endlich hielt. Wir werden deshalb Beispiele betrachten, die eine unendliche Ausflußzeit ergeben, und durch zweckentsprechende Abänderung des Gefäßes zur Erzielung einer endlichen Ausflußzeit die Bedingung für eine unendliche Ausflußzeit indirekt beweisen. Schließlich werden wir die Fähigkeit erlangen, nur aus der Gleichung der Kurve des Gefäßes und der Öffnung, ohne uns ein Bild von dem Gefäße zu machen und ohne Berechnung der Ausflußzeit, endliche oder unendliche Ausflußzeiten zu folgern.

Das Ausflußproblem, welches wir an Hand der Fig. 2 behandelten, ergab unter Berücksichtigung des Grenzzustandes nach Kap. II, Gl. 4 eine unendliche Ausflußzeit. Der erste Teil der Ausflußperiode für f = konst. erfordert die Zeit

$$t = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{\frac{f}{u}}\right\}.$$

Dieser Wert wird stets endlich sein, so daß die Bedingung für ein Ausfließen in der Unendlichkeit im zweiten Teil der Ausflußperiode enthalten sein muß. Wir ändern deshalb Fig. 5 dahin ab, daß wir die Gefäßwand bei der Höhe $\frac{d}{4}$ kegelförmig nach der Ausflußöffnung zu sich verjüngen lassen, wie aus Fig. 16 ersichtlich ist. Die sekundliche Ausflußmenge durch einen rechteckigen Querschnitt $d\,\pi\,x$ war nach den früheren Betrachtungen (Fig. 4)

$$Q = \frac{2}{3}\, d\,\pi\, x \sqrt{2\,g\,x}.$$

Hieraus erhalten wir ferner

$$-F_x\,dx = \frac{2}{3}\, d\,\pi\, x \sqrt{2\,g\,x}\,dt,$$

und hätten noch F_x als Funktion von x darzustellen. Es ist

$$F_x = (y + r)^2\,\pi - r^2\,\pi$$
$$= y^2\,\pi + 2\,r\,y\,\pi.$$

Es verhält sich

$$y : (R - r) = x : \frac{d}{4}.$$

Mithin

$$F_x = \left(\frac{4\,(R - r)\,x}{d}\right)^2 \pi + \frac{8\,r\,\pi}{d}\,(R - r)\,x,$$

oder

$$F_x = A\,x^2 + B\,x.$$

A und B sind durch die frühere Gleichung definiert. Wir erhalten schließlich, wenn wir noch

$$\frac{2}{3}\, d\,\pi \sqrt{2\,g} = C$$

setzen,

$$T = \frac{1}{C} \int_0^{\frac{d}{4}} \left\{ \frac{A x^2}{x^{3/2}} + \frac{B x}{x^{3/2}} \right\} dx ,$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{A}{C} \left(\frac{d}{4}\right)^{3/2} + \frac{2B}{C} \left(\frac{d}{4}\right)^{1/2} .$$

Da die Konstanten A, B und C endlich sind, ist die Ausflußzeit ebenfalls endlich. Es sei noch hervorgehoben, daß es ganz gleichgültig ist, nach welcher Kurve sich in Fig. 5 die Gefäßwand dem horizontalen Boden nähert; wir können dem Gefäße immer einen Zylinder einschreiben, und der übrige Teil der Flüssigkeit bedingt ein noch langsameres Sinken des Niveaus. Die Umwandlung des zylindrischen Gefäßes geschah also zur Beseitigung des horizontalen Bodens, indem das Gefäß nach Fig. 16 nur auf einer theoretischen Linie steht.

Auch das Ausflußproblem nach Fig. 4 ergab eine unendliche Ausflußzeit. Wir hatten aber in Fig. 5 die Analogie eines Gefäßes nach Fig. 2 und 4 nachgewiesen, indem sich die Bodenöffnung in Fig. 2 ersetzen läßt durch eine seitliche, die sich mit x allmählich verringert. Also können wir die seitliche Öffnung bei der Grenze $h = f : u$ auch in den Boden des Gefäßes verlegen, so daß wir ein Beispiel nach Fig. 4 nicht besonders behandeln brauchen. Da sich aber die Bodenöffnung auch bei dem Kegel in einen seitlichen Ausflußquerschnitt umwandelt — wir dürfen uns die Kegelwand nach oben verlängert denken — mithin die Erscheinung in Fig. 5 auch endlichen Ausflußproblemen zukommt, so scheiden für unsere Betrachtungen die Gefäße mit einer Bodenöffnung aus. Ganz allgemein können wir die Erkenntnis aussprechen:

„Ein Gefäß mit einer Bodenöffnung verwandelt sich in den letzten Phasen des Ausflusses in Satz 1.

ein analoges mit seitlicher Öffnung.“ — Hiervon sind die Gefäße auszuscheiden, die während des gesamten Ausflusses dem Fallgesetze unterliegen, was durch die Gleichung $v = \sqrt{2}\, v_0$ in Kapitel I definiert war, mithin Gefäße, die sich dem Charakter der Röhren nähern. Da aber bei dem endlichen Ausflußproblem nach Fig. 16 dieser Grenzzustand unbedingt erreicht werden muß, da für $x = 0$ sogar $F_x = f_x$ ist, so können wir den Satz aussprechen: „Ein endliches Ausflußproblem wird in den letzten Phasen des Ausflusses durch das Fallgesetz beeinflußt.“ — Der Ausflußquerschnitt nimmt in jedem Falle für $x = 0$ zu Null ab, so daß auch $F = 0$ werden muß. Hieraus können wir schließen, daß bei einem unendlichen Ausflußvorgange das Verhältnis $F_x : f_x$ für $x = 0$ unendlich sein wird. Nach Fig. 5 erhalten wir $F : d\,\pi\,x$, welcher Wert für $x = 0$ unendlich wird. Durch diese Art des Vergleiches von $F_x : f_x$ ist, wie wir später einsehen werden, ein umfassendes Kriterium zur Bestimmung der Ausflußzeit definiert. Aus den Betrachtungen über ein Beispiel nach Fig. 16 könnte man leichtfertig schließen, daß Ausflußprobleme, bei denen der Boden des Gefäßes eine Linie ist, stets eine endliche Ausflußzeit ergeben. Wir werden jedoch sehen, daß selbst Gefäße mit einem punktförmigen Boden eine unendliche Ausflußzeit zur Folge haben können.

Satz 2.

Wenden wir uns jetzt dem in Fig. 17 dargestellten Problem zu, wo das Wasser aus einem Dreiecksquerschnitte ausfließen soll. Das Gefäß sei ein dreikantiges Prisma, und der Ausflußquerschnitt befinde sich in der senkrechten Wand. Wir bestimmen zunächst das bei einem beliebigen konstant gehaltenen Niveau ausfließende Wasservolumen. Es ist

$$dQ = 2u\,dz\sqrt{2gz},$$

$$u = (h - x + z)\,\frac{b}{h},$$

$$Q_x = 2\sqrt{2g}\left\{(h-x)\frac{b}{h}\int_0^x z^{1/2}\,dz + \frac{b}{h}\int_0^x z^{3/2}\,dz\right\}$$

$$= 2\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\,\frac{b}{h}\,(h-x)\,x^{3/2} + \frac{2}{5}\,\frac{b}{h}\,x^{5/2}\right\}$$

$$= 2\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\,b\,x^{3/2} - \frac{4}{15}\,\frac{b}{h}\,x^{5/2}\right\},$$

$$Q_x = \frac{4}{3}\,b\,x\sqrt{2gx}\left\{1 - \frac{2}{5}\,\frac{x}{h}\right\}.$$

Die Ausflußzeit bestimmt sich:

$$-F_x\,dx = Q_x\,dt,$$

$$F_x = v\,l = x\,\frac{B}{h}\,l,$$

mithin

$$T = \frac{3Bl}{4\sqrt{2g}\,b\,h}\int_0^h \frac{dx}{x^{1/2}\left(1 - \frac{2}{5}\,\frac{x}{h}\right)}.$$

Man setze

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{10\,h}\,du; \quad x = \frac{5}{2}\,h\,u.$$

Es wird dann

$$T = \frac{3Bl}{4\sqrt{2g}\,b\,h}\sqrt{10\,h}\int\frac{du}{1-u^2}$$

$$= \frac{3Bl\sqrt{10}}{\sqrt{2g}\,b\sqrt{h}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{10}\,Bl}{8\sqrt{2g}\,b\sqrt{h}}\left[\ln\frac{\sqrt{5h}+\sqrt{2x}}{\sqrt{5h}-\sqrt{2x}}\right]_0^h,$$

$$T = \frac{3\sqrt{10}\,Bl}{8\sqrt{2g}\,b\sqrt{h}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \quad \text{Gl. 1.}$$

Hiernach ist die Ausflußzeit eine endliche. Wir wollen aber prüfen, ob das ausfließende Wasser auch in jedem Augenblicke den in die Rechnung eingeführten Querschnitt ausfüllt, so wie wir es an Hand der Fig. 5 geprüft hatten. Das Wasser strömt nach Fig. 17 in Richtung der eingezeichneten Pfeile durch den Dreiecksquerschnitt v.x. Zeichnen wir diesen Querschnitt nach Fig. 18 über den in die Rechnung eingeführten, so sieht man, daß dieser bei der Höhe s schon in jedem späteren Augenblicke größer ist als der von links und rechts durchflossene Querschnitt. Die Grenze, bei welcher die Querschnitte gleich sind, bestimmt sich, wie folgt:

$$v\,x = b\,h - y\,(h - x),$$

$$v^2 \frac{B}{h} + (h - x)^2 \frac{b}{h} = bh,$$

$$x^2 \left(\frac{B}{h} + \frac{b}{h}\right) - 2\,x\,b = 0,$$

$$x = \frac{2\,b\,h}{B + b} \quad \ldots\ldots \text{Gl. 2.}$$

Von dieser Grenze ab wäre der Dreiecksquerschnitt v.x als variabel einzuführen. Ist nun $B \leq b$, so wird $x \geq h$, woraus folgt, daß dann der in Rechnung gezogene Querschnitt b h in keinem Augenblicke als variabel einzuführen ist. Auf jeden Fall erhalten wir einen Ausflußvorgang, wie er in Fig. 19 dargestellt ist, indem die beiden Hälften zusammengelegt sind. Wir bestimmen zunächst die sekundliche Ausflußmenge bei konstantem Niveau x und erhalten

$$d\,Q = 2\,u\,dz\sqrt{2\,g\,z},$$

$$u = \frac{B}{h}(x - z),$$

$$Q = \frac{2B}{h} \sqrt{2g} \int_0^x \left\{ x\, z^{1/2} - z^{3/2} \right\} dz,$$

$$= \frac{2B}{h} \sqrt{2g} \left[x \frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{2}{5} z^{5/2} \right]_0^x$$

$$Q_x = \frac{8B}{15h} \sqrt{2g}\, x^{5/2}.$$

Mithin

$$-F_x\, dx = Q_x\, dt,$$

$$F_x = 2vl = 2l \frac{B}{h} x,$$

$$T = \frac{15l}{4\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dx}{x^{3/2}},$$

$$T = \frac{15l}{2\sqrt{2g}} \left\{ \infty - \frac{1}{\sqrt{h}} \right\}.$$

Die Ausflußzeit ist also unendlich groß, so daß das frühere endliche Resultat nur ein scheinbares ist. Aber auch aus logischen Gründen können wir ohne Bestimmung des Grenzzustandes nach Gl. 2 das Resultat der Gl. 1 verwerfen. Denn in dieser Gleichung ist die Ausflußzeit umgekehrt proportional der Gefäßhöhe, was als unmöglich bezeichnet werden muß, und wie man sich leicht überzeugen kann, ist dies bei den Problemen der Fall, die wohl mathematisch auszurechnen sind, aber von der Natur der Flüssigkeit nicht befolgt werden. Wir haben daher die Einsicht erlangt: „Ist das Resultat der Ausflußzeit umgekehrt proportional der Gefäßhöhe, so ist das Problem unausführbar.“ Dieser Satz hat allgemeine Gültigkeit, so daß selbst die Berücksichtigung der Grenze nach G. 2 keinen Wert hat. Hieraus können wir den Schluß ziehen, daß der Aus- Satz 3.

flußquerschnitt in jeder Höhe höchstens gleich dem vertikalen Gefäßquerschnitte sein darf, so daß die Kurve des Ausflußquerschnittes nirgends über die Gefäßwand hinausragt. Andere Probleme haben daher keine Bedeutung, auch wenn sie ein Resultat ergeben, welches proportional der Gefäßhöhe ist. Dies wäre z. B. bei einem Ausflußvorgange der Fall, bei welchem nach Fig. 19 d . h, der Ausflußquerschnitt, größer ist als B . h, der vertikale Gefäßquerschnitt.

Wir wollen jetzt das Gefäß nach Fig. 19 um einen Winkel α drehen, und für den Teil I nach Fig. 20 die Ausflußzeit berechnen, da die Teile II und III unbedingt in endlicher Zeit ausfließen. Die sekundliche Ausflußmenge betrug

$$Q = \frac{8\,E\sqrt{2\,g}}{15\,l\sin\alpha}\,x^{5/2}.$$

Es ist

$$F = \frac{y\,z}{2} = \frac{D\,E\,x^2}{2\,l^2\sin^2\alpha}.$$

Mithin

$$T = \frac{D\,E}{2\,l^2\sin^2\alpha}\;\frac{15\,l\sin\alpha}{8\,E\sqrt{2\,g}}\int_0^{l\sin\alpha}\frac{dx}{x^{1/2}},$$

$$T = \frac{15\,D}{8\sqrt{2\,g}\,\sqrt{l\sin\alpha}}.$$

Die Ausflußzeit ist also endlich. Für $\alpha = 0$ wird die Ausflußzeit wieder unendlich.

Wir bestimmen jetzt die Ausflußzeit eines Gefäßes nach Fig. 21. Die Kurve sei eine Parabel von der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$. Die Ausflußmenge durch den rechteckigen Querschnitt ist

$$Q = \frac{2}{3}\,l\,x\sqrt{2\,g\,x}.$$

Mithin

$$-F\,dx = \frac{2}{3}\,l\,x\sqrt{2\,g\,x}\,dt,$$

$$F = y\,l = \sqrt{2\,p\,x}\,l,$$

$$T = \frac{3\sqrt{2\,p}}{2\sqrt{2\,g}} \int_0^h \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{3\sqrt{2\,p}}{2\sqrt{2\,g}} \left\{ l\,n\,h + \infty \right\}.$$

Diesem Probleme wollen wir ein ähnliches nach Fig. 22 gegenüberstellen. Es ist

$$Q = \frac{2}{3}\,l\,x\sqrt{2\,g\,x},$$

$$F = y\,l = x\,tg\,\alpha\,l,$$

$$T = \frac{3\,tg\,\alpha}{2\sqrt{2\,g}} \int_0^h \frac{dx}{x^{1/2}}$$

$$= \frac{3\,tg\,\alpha}{\sqrt{2\,g}} \left\{ \sqrt{h} - 0 \right\}.$$

Während also die Ausflußzeit eines Parabelgefäßes, bei welchem die Kurve tangential-horizontal ausläuft, unendlich ist, erhalten wir bei einem Gefäße, welches auf einer geneigten Geraden steht, eine endliche Ausflußzeit. Beide Ausflußzeiten sind unabhängig von der Länge l des Gefäßes.

Wir betrachten im folgenden Gefäße, die auf einem Punkte stehen, und zunächst ein Rotationsparaboloid nach Fig. 23, bei welchem die linke Projektion den Ausflußquerschnitt darstellt. Es ist

$$d\,Q = 2\,u\,dz\sqrt{2\,g\,z},$$

$$u = \sqrt{2\,p\,(x - z)},$$

$$Q = 2\sqrt{2\,g}\sqrt{2\,p} \int z^{1/2}\sqrt{x - z}\,dz.$$

Man setze

$$z = x \sin^2 v; \quad \sqrt{x - z} = x^{1/2} \cos v;$$

$$dz = 2 x \sin v \cos v \, dv.$$

Wir berechnen zunächst das Integral:

$$\int_0^x z^{1/2} \sqrt{x - z} \, dz = 2 x^3 \int \sin^2 v \cos^2 v \, dv.$$

Dies gibt, wie aus Tabellen folgt:

$$J = \frac{x^2}{2} \cos v \sin^3 v - \frac{x^2}{4} \cos v \sin v + \frac{x^2}{4} v$$

$$= \frac{x^2}{2} \left(\frac{z}{x}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{z}{x}} - \frac{x^2}{4} \left(\frac{z}{x}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{z}{x}} + \frac{x^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{z}{x}}.$$

Die beiden ersten Glieder ergeben für die beiden Grenzen den Wert Null, so daß das Integral den Wert hat

$$\int_0^x z^{1/2} \sqrt{x - z} \, dz = \frac{\pi}{8} x^2.$$

Mithin

$$Q = \frac{\pi}{4} x^2 \sqrt{2 p} \sqrt{2 g}.$$

Ferner

$$-F \, dx = Q \, dt,$$

$$F = \frac{y^2 \pi}{2} = p x \pi.$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{p}{g}} \int_0^h \frac{dx}{x},$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{p}{g}} \left\{ \ln h + \infty \right\}.$$

Wir wenden uns dem in Fig. 24 dargestellten Probleme zu. Es ist

$$Q = \frac{8}{15} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2g}\, x^{5/2}.$$

Mithin

$$-F\,dx = Q\,dt,$$

$$F = \frac{y^2 \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha\, x^2,$$

$$T = \frac{15 \pi \operatorname{tg} \alpha}{15 \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dx}{x^{1/2}},$$

$$T = \frac{15 \pi \operatorname{tg} \alpha}{8 \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - 0 \right\}.$$

Während wir also bei dem Parabelkegel eine unendliche Ausflußzeit erhielten, erfolgt bei diesem Probleme der Ausfluß in endlicher Zeit. Hierfür kann als Grund nur der horizontale mathematische Punkt des Parabelgefäßes hingestellt werden. Wir dürfen nun annehmen, daß der mathematische Niveauquerschnitt durch den Ausflußquerschnitt keine Einengung erfährt; denn wir werden später sehen, daß bei der Freigabe der Gefäßwand auf den ganzen Umfang des horizontalen Punktes von einem solchen nicht mehr die Rede sein kann. Da wir es bei den bisherigen Problemen, wenn sie eine unendliche Ausflußzeit ergaben, stets mit einem horizontalen Bodenelemente zu tun hatten, mag dies eine Fläche, Linie oder ein Punkt sein, so muß der Charakter der Unendlichkeit durch sie bedingt sein. Lassen wir den horizontalen Punkt, der nur gedacht eine unendliche Ausflußzeit ergibt, nach allen Richtungen wachsen, so erhalten wir eine einfache Platte ohne Gefäßwand, und die Abflußzeit des Wassers ist auch hier, wie

man sich leicht berechnen kann, unendlich groß. Führt man dies praktisch aus, so bleibt infolge der Widerstände ein Teil des Wassers zurück, so daß die unendliche Ausflußzeit noch vergrößert wird. Damit sind wir aber zu dem einfachen Resultate gelangt:

Satz 4. „Einem Ausflußvorgange von einem horizontalen Gebilde liegt eine unendliche Ausflußzeit zugrunde.“ — Die Kenntnis dieses Satzes läßt die Ausflußzeit eines Problems nach Fig. 2 von vornherein als unendlich erkennen. Ein auf der Niveaufläche lastender Überdruck würde ein endliches Resultat bewirken. Denken wir uns diesen durch eine zweite Flüssigkeitsschicht ersetzt, so sieht man, daß eben nur ein Teil der vorhandenen Substanz in endlicher Zeit ausfließen konnte.

Nach den bisherigen Beispielen für eine unendliche Ausflußzeit könnte man annehmen, daß der Charakter des Horizontalen die alleinige Bedingung für eine unendliche Ausflußzeit ist. Es tritt aber bei einem Beispiele nach Fig. 23 unbedingt die Erscheinung hervor, daß der mathematische Punkt der Niveaufläche für $x = 0$ wohl zu Null abnimmt, aber doch dem Ausflußquerschnitte nicht gleich sein kann, da sonst bei der Grenze $v = \sqrt{2}\, v_0$ der Satz 2 in Anwendung käme. Wie man sich aber leicht überzeugen kann, entfernt man sich bei dem betreffenden Probleme nach Fig. 23 mit abnehmendem x dieser Grenze mehr und mehr und findet schließlich, daß das Verhältnis von $\frac{y^2\pi}{2} : \frac{4}{3}\, y\, x$ für $x = 0$ unendlich wird. Trotzdem also der mathematische Punkt an sich den Wert Null hat, kann er doch unendlich mal größer sein als ein anderer Nullwert. Durch diese Überlegung sind wir zu der Einsicht gelangt, daß Gefäße, welche bei unseren früheren Betrachtungen eine end-

liche Ausflußzeit ergaben, indem der Gefäßquerschnitt mit der Ausflußöffnung zu Null abnahm, mit einem unendlich schneller zu Null abnehmenden Ausflußquerschnitte kombiniert, eine unendliche Ausflußzeit ergeben werden.

Von der Richtigkeit dieser Folgerung wollen wir uns durch ein Beispiel nach Fig. 25 überzeugen. Das Gefäß ist ein halber Kegel, in dessen senkrechtem Schnitte sich der Ausflußquerschnitt befindet, welcher durch zwei Parabelzweige gebildet ist, deren Scheiteltangente die X-Achse ist. Wir verfahren bei der Bestimmung der Ausflußzeit wie früher:

$$d\,Q = 2\,u\,dz\,\sqrt{2\,g\,z};$$

$$u = \frac{(x-z)^2}{2\,p}.$$

$$Q = \frac{\sqrt{2\,g}}{p}\int_0^x z^{1/2}\,(x-z)^2\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{2\,g}}{p}\int\left\{x^2\,z^{1/2} - 2\,x\,z^{3/2} + z^{5/2}\right\}dz$$

$$= \frac{\sqrt{2\,g}}{p}\left[\frac{2}{3}\,x^2\,z^{3/2} - \frac{1}{5}\,x\,z^{5/2} + \frac{2}{7}\,z^{7/2}\right]_0^x,$$

$$Q = \frac{79\,\sqrt{2\,g}}{105\,p}\,x^{7/2}.$$

$$-F\,dx = Q\,dt;$$

$$F = \frac{y^2\,\pi}{2} = x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{\pi}{2}.$$

Mithin die Ausflußzeit

$$T = \frac{105\,p\,\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{158\,\sqrt{2\,g}}\int_0^h \frac{dx}{x^{3/2}},$$

$$T = \frac{105\,p\,\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{79\,\sqrt{2\,g}}\left\{\infty - \frac{1}{\sqrt{h}}\right\}.$$

Durch dieses Resultat ist also gezeigt, daß das Vorhandensein eines der drei horizontalen Elemente nicht erforderlich ist, um ein Ausfließen der Flüssigkeit in der Unendlichkeit zu bewirken.

Der in Fig. 25 gewählte Ausflußquerschnitt zeichnet sich durch die beiden in der X-Achse tangierenden Parabelzweige aus, die so einen vertikalen mathematischen Punkt bilden, der unendlich größer ist als der Nullpunkt des Kegels, so daß hierdurch der Ausflußquerschnitt unendlich früher zu Null abnimmt als der Gefäßquerschnitt. Es kann daher nur durch diese Art des vertikalen Tangierens der Kurven des Ausflußquerschnittes die unendliche Ausflußzeit einer unter anderen Umständen in endlicher Zeit ausfließenden Flüssigkeit bewirkt werden. Daß aber ein Ausflußquerschnitt nach Fig. 25 für eine unendliche Ausflußzeit nicht charakteristisch ist, möge ein Beispiel nach Fig. 26 zeigen. Es ist nach dem letzten Probleme

$$Q = \frac{79\sqrt{2g}}{105\,p}\,x^{7/2}.$$

Ferner

$$-F\,dx = Q\,dt,$$

$$F = \frac{y^2\pi}{2} = \frac{x^4\pi}{2\,(2p)^2};$$

mithin

$$T = \frac{105\,\pi}{632\,p\sqrt{2g}}\int_0^h x^{1/2}\,dx,$$

$$T = \frac{35\,\pi}{316\,p\sqrt{2g}}\left\{h^{3/2} - 0\right\}.$$

Nachdem wir gesehen haben, daß es bei einem vertikal tangierenden Ausflußquerschnitte lediglich auf die Form der Gefäßwand ankommt, um endliche oder unendliche Ausflußzeiten zu ergeben, so

wird die Bedingung für eine unendliche Ausflußzeit auch eine Funktion des Gefäß- und Ausflußquerschnittes sein, was wir folgendermaßen aussprechen wollen: „Die unendliche Ausflußzeit ist durch das unendliche Verhältnis des Gefäßquerschnittes zum Ausflußquerschnitt für $x = 0$ bedingt, und $\lim_{x=0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ stellt den niedrigsten Unendlichkeitsgrad dar.“ Satz 5.

Für die Bestimmung der Ausflußzeit erhielten wir stets die Gleichung

$$T = \int_0^h \frac{F}{Q}\, dx.$$

Da sich der Charakter der Ausflußzeit für die Grenze $x = 0$ ergibt, so können die konstanten Faktoren von x — unter der Voraussetzung, daß die Kurven in dem Intervalle 0 bis h endlich und stetig sind — vernachlässigt werden. Bezeichnen wir mit $F(x)$ und $Q(x)$ die dem Gefäß- und Ausflußquerschnitte zugehörigen x-Werte, so erhalten wir den Wert des Integrals

$$J = \int_0^h \frac{F(x)}{Q(x)}\, dx.$$

War z. B. nach Fig. 23 die Niveaufläche $F = p\,\pi\,x$ und die Wassermenge $Q = \frac{8}{15} B \sqrt{2g}\, x^{5/2}$, so ergibt sich (Fig. 19)

$$J = \int_0^h \frac{x}{x^{5/2}}\, dx = 2\left\{\frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right\}.$$

Können wir aber die konstanten Faktoren beim Einsetzen in das Integral vernachlässigen, so fragt es sich, ob wir sie nicht von vornherein übersehen

können, indem wir die Flächen als ein Produkt der variablen Größen darstellen. Führen wir dies für das soeben angenommene Problem durch, so ist, mit Y die dem Gefäße zugehörige Variable bezeichnend,

$$F = \frac{Y^2 \pi}{2} = p \pi x,$$

und mit f den Ausflußquerschnitt charakterisierend,

$$f = y x = x^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Multiplizieren wir diesen Wert mit $\sqrt{2 g x}$, so erhalten wir die Wassermenge

$$Q = \sqrt{2 g x}\, x^2 \operatorname{tg} \alpha = x^{5/2} \sqrt{2 g} \operatorname{tg} \alpha.$$

Mithin das Integral

$$J = \int_0^h \frac{x}{x^{5/2}}\, dx = 2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right\}$$

wie früher. Hierdurch hätten wir also den Vorteil erreicht, die Wassermenge Q in der Abhängigkeit von x ohne Hilfe der Differentialrechnung zu bestimmen. Dieselbe Methode gilt auch für endliche Ausflußzeiten, da die konstanten Faktoren für die untere Grenze x = 0 ebenfalls ohne Einfluß sind. Dies möge noch an dem Beispiele nach Fig. 24 gezeigt werden.

Es ist

$$F = \frac{Y^2 \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot x^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

und

$$Q = y x \sqrt{2 g x} = x^{5/2} \sqrt{2 g} \operatorname{tg} \alpha.$$

Mithin

$$J = \int_0^h \frac{x^2}{x^{5/2}}\, dx = 2 \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{0} \right\}.$$

Gehen konstante Werte mit den Variablen in geschlossener Form unter das Integral, so verfahren wir ähnlich. Es sei z. B. der Beweis zu erbringen, daß der horizontale mathematische, nach Fig. 23 gekennzeichnete Bodenpunkt bei Freigabe seines gesamten Umfanges nicht mehr vorhanden ist. Wir bestimmen zunächst die Umfängsfläche eines Paraboloides aus der Gleichung

$$f = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx;$$

$$f(x) = \sqrt{2px};\ f'^2(x) = \frac{p}{2x}.$$

$$f = 2\pi \sqrt{p} \int \sqrt{2x + p}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left\{(2x + p)^{3/2} - p^{3/2}\right\}.$$

Die Niveaufläche habe die Größe

$$F = Y^2 \pi = 2p\pi x.$$

Mithin erhalten wir

$$J = \int \frac{x^{1/2}\, dx}{(2x + p)^{3/2} - p^{3/2}}.$$

Behandeln wir jetzt das Integral für die untere Grenze, so geht der Nenner in den Wert x über. Da aber für die obere Grenze die Konstanten von Einfluß sind, so sind wir jetzt nicht mehr in der Lage, den Wert des Integrals aus der unteren Grenze zu erkennen. Wir können deshalb nur den Ausflußgrad erhalten, den wir mit G bezeichnen wollen. Demnach ergibt sich

$$G = \int_0 \frac{x^{1/2}\, dx}{x} = \sqrt{0} = \text{endlich.}$$

Der horizontale Bodenpunkt muß daher mit der Gefäßwand verschwunden sein.

Zu erwähnen wäre noch, daß die logarithmische Unendlichkeit nur einem horizontal-tangierenden Punkte zukommt, so daß also das Problem nach Fig. 21 hierauf zurückzuführen ist, indem wir die Länge des Gefäßes bis auf das Längenelement dl zusammenschrumpfen lassen, ohne daß an der Ausflußzeit etwas geändert wird. Wenn wir daher für einen Ausflußvorgang nach Fig. 2 bei Wasserzufluß von oben die logarithmische Unendlichkeit erhalten haben, so ist der Vorgang als ein Durchströmen der Flüssigkeit zwischen mathematischen Punkten zu erklären, und wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 6. „Die logarithmische Unendlichkeit ist charakteristisch für ein Durchsickern der Flüssigkeit."

Da wir bei der Bestimmung des Ausflußgrades die Vernachlässigung konstanter Faktoren zugelassen haben, so sind wir nicht mehr in der Lage, aus dem gewonnenen Resultate die Probleme, welche nach Satz 3 auszuscheiden sind, zu erkennen. Wir haben deshalb folgendes zu beachten: Ist Y die Variable des Gefäßquerschnittes, in welcher y, die Veränderliche der Öffnung, liegt, so darf die Abnahme des Gefäßquerschnittes nach der Gleichung $Y = f_x$ höchstens gleich der der Öffnung nach dem Gesetze $y = f_x$ sein. Ist z. B. $Y = \sqrt{2px}$, so muß sein $y = x^{\frac{m}{2}}$, wo $m \geq 1$ sein kann. Dann wird der zu Null abnehmende Gefäßquerschnitt höchstens gleich dem Nullwerte der Öffnung oder größer als dieser sein.

Nachdem wir auch diesen Spezialfall erledigt haben, wollen wir noch die zweite Veränderliche des Gefäßquerschnittes mit Y_1 einführen und das Kriterium zur Erkenntnis des Ausflußgrades in übersichtlicher Form niederschreiben:

„Gegeben Y, Y_1 und y als Funktionen von x, welche in dem Intervalle 0 bis x endlich und stetig sind.

Die Querschnitte $F_x = f(Y, Y_1)$ und $f_x = f(y, x)$.

Vorausgesetzt $\lim_{x=0} \frac{Y}{y} = \frac{1}{x^n}$, für $n \geqq 0$. Ist $\lim_{x=0} Y =$ endlich und $\lim_{x=0} (Y > y)$, so muß sein $\lim_{x=0} \frac{Y_1}{y} = \frac{1}{x^n}$.

$F(x)$ und $f(x)$ seien die Querschnitte für $x = 0$, so

$$G = \lim_{x=0} \int \frac{F(x)\,dx}{f(x)\sqrt{x}}.“$$

Das Kriterium möge noch an einem ausführlichen Beispiele erläutert werden.

Es seien die Gleichungen gegeben

1. $\left(x^2 + Y^2 - \frac{a\,x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2}(x^2 + Y^2)$,

2. $Y_1^2 = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{2\,a^2}\,x^2$

und

3. $(x^2 + y^2)^2 = 2\,a^2(x^2 - y^2)$.

Die Querschnitte seien

$$F_x = Y \,.\, Y_1 \quad \text{und} \quad f_x = y \,.\, x.$$

Wir entwickeln zunächst die erste Gleichung:

$$\left(x^2 + Y^2 - \frac{a\,x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2}(x^2 + Y^2),$$

$$x^4 + 4\,x^2\,Y^2 - 2\sqrt{2}\,a\,x^3 + Y^4 - 2\sqrt{2}\,a\,x\,Y^2 = \frac{a^2}{2}\,Y^2,$$

$$Y^4 + Y^2\left(4\,x^2 - 2\sqrt{2}\,a\,x - \frac{a^2}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,a\,x^3 - x^4,$$

$$Y = \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}\,a\,x^3 - x^4 + \left(2x^2 - \sqrt{2}\,a\,x - \frac{a^2}{4}\right)^2} - 2x^2 + \sqrt{2}\,a\,x + \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{16} + \sqrt{2}\,a^3\,x - 6\sqrt{2}\,a\,x^3 + 3x^4} - 2x^2 + \sqrt{2}\,a\,x + \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{16}\left\{1 + 16\sqrt{2}\,\frac{x}{a} - 96\sqrt{2}\,\frac{x^3}{a^3} + 48\,x^4\right\}} - 2x^2 + \sqrt{2}\,a\,x + \frac{a^2}{4}}.$$

Entwickelt man die untere Wurzel in eine Reihe, so erhält man

$$Y = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{2}\,a\,x - 2x^2 - 12\sqrt{2}\,\frac{x^3}{a} + 6\,\frac{x^4}{a^2} \ldots}.$$

Hieraus ergibt sich

$$4. \quad \lim_{x=0} Y = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Die zweite Gleichung ergibt:

$$Y_1 = x^{1/2}\sqrt{\sqrt{2}\,\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\,x}.$$

Mithin

$$5. \quad \lim_{x=0} Y_1 = x^{1/2}.$$

Wir entwickeln die dritte Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

$$y^4 + 2y^2(a^2 + x^2) = 2a^2x^2 - x^4,$$

$$y = \sqrt{\sqrt{2a^2x^2 - x^4 + (a^2 + x^2)^2} - a^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{\sqrt{a^4 + 4a^2x^2} - a^2 - x^2}.$$

Wir entwickeln in eine Reihe:

$$y = \sqrt{a^2\left\{1 + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^4}{a^4} \pm \ldots\right\} - a^2 - x^2},$$

und erhalten somit

$$6. \quad \lim_{x=0} y = x.$$

Wir untersuchen zunächst nach Gl. 4 und 6

$$\lim_{x=0} \frac{Y}{y} = \frac{a}{\sqrt{2}.x} = \frac{1}{x}.$$

Es ist

$$\lim_{x=0} Y = \frac{a}{\sqrt{2}} = \text{endlich},$$

und

$$\lim_{x=0} \left(Y = \frac{a}{\sqrt{2}} > y = x\right).$$

Mithin

$$\lim_{x=0} \frac{Y_1}{y} = \frac{x^{1/2}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Da die Vorbedingungen erfüllt sind, können wir den Ausflußgrad bestimmen:

$$G = \lim_{x=0} \int \frac{a \,.\, x^{1/2}\, dx}{\sqrt{2}\, x \,.\, x \,.\, x^{1/2}} = \lim_{x=0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Anhang.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

1. Die Gleichung $v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{f^2}{F^2}}}$ gilt nur für ein Querschnittsverhältnis $F : f \geq \sqrt{2}$, wo F den Niveauquerschnitt bezeichnet.
2. Eine Bodenöffnung bleibt konstant bis zu der Grenze $h = f : u$, wo u den Umfang der Öffnung darstellt.
3. Die Ausflußzeit für ein Gefäß von konstantem Querschnitte und mit einer Bodenöffnung ergibt sich aus der Gleichung

$$T = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{\frac{f}{u}}\right\} + \frac{3(F-f)}{u\sqrt{2g}}\left\{\infty - \sqrt{\frac{u}{f}}\right\}.$$

4. Die Konstanten einer gleichmäßig konvergierenden Reihe sind durch eine kontinuierliche Kurve bestimmbar.
5. Ein Ausflußproblem mit einer Bodenöffnung verwandelt sich in den letzten Phasen des Ausflusses in ein analoges mit seitlicher Öffnung.
6. Ein endliches Ausflußproblem wird in den letzten Phasen des Ausflusses durch das Fallgesetz beeinflußt.
7. Ist das Resultat der Ausflußzeit umgekehrt proportional der Gefäßhöhe, so ist das Problem unausführbar.

8. Einem Ausflußvorgange von einem horizontalen Gebilde liegt eine unendliche Ausflußzeit zugrunde.
9. Die unendliche Ausflußzeit ist durch das unendliche Verhältnis des Gefäßquerschnittes zum Ausflußquerschnitt für $x = 0$ bedingt, und $\lim_{x=0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ stellt den niedrigsten Unendlichkeitsgrad dar.
10. Die logarithmische Unendlichkeit ist charakteristisch für ein Durchsickern der Flüssigkeit.
11. Sind die Kurven des Gefäßes und der Öffnung gegeben, so kann, wenn $F(x)$ und $f(x)$ die zugehörigen Querschnitte für $x = 0$ bezeichnen, der Ausflußgrad des möglichen Problems bestimmt werden nach der Gleichung $G = \lim_{x=0} \int \frac{F(x)\,dx}{f(x)\sqrt{x}}$.

Litteraturangabe.

Keck, W., Vorträge über Mechanik. II. Teil: Mechanik elastisch fester und flüssiger Körper (Hannover).

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, herausgegeben von Pr. O. Schlömilch, Bd. II (Leipzig).

Gräff, Mémoire concernant le mouvement des eaux dans les réservoirs d'eau à niveau variable. (Ann. de génie civil 1869).

A. de Saint-Germain. Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec un port à marée. (Académie des sciences, Paris 119.)

Darignon, P., Manière géometrique et générale de faire des depsydres ou horloges d'eau avec toute sorte de doses données. (Mem. Paris 1699.)

P. v. Schäven, Geschwindigkeiten und Ausflußzeiten von Gefäßen. (Rep. für Exp. Phys. 1882, herausgegeben von Ph. Carl, XXIII. Bd.)

Hégly, Über den Übergang des Ausflusses durch eine Öffnung in den Abfluß über ein Wehr. (Académie des sciences, Paris 1896.)

Hermanek, J., Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten aus Mündungen und an Überfällen. (Wien, Anz. 1903.)

Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, I. Bd. (Berlin.)

Maiß, Torricelli-Gesetz. (Zeitschr. für Unterricht 1892.)

Fig. 1—15.

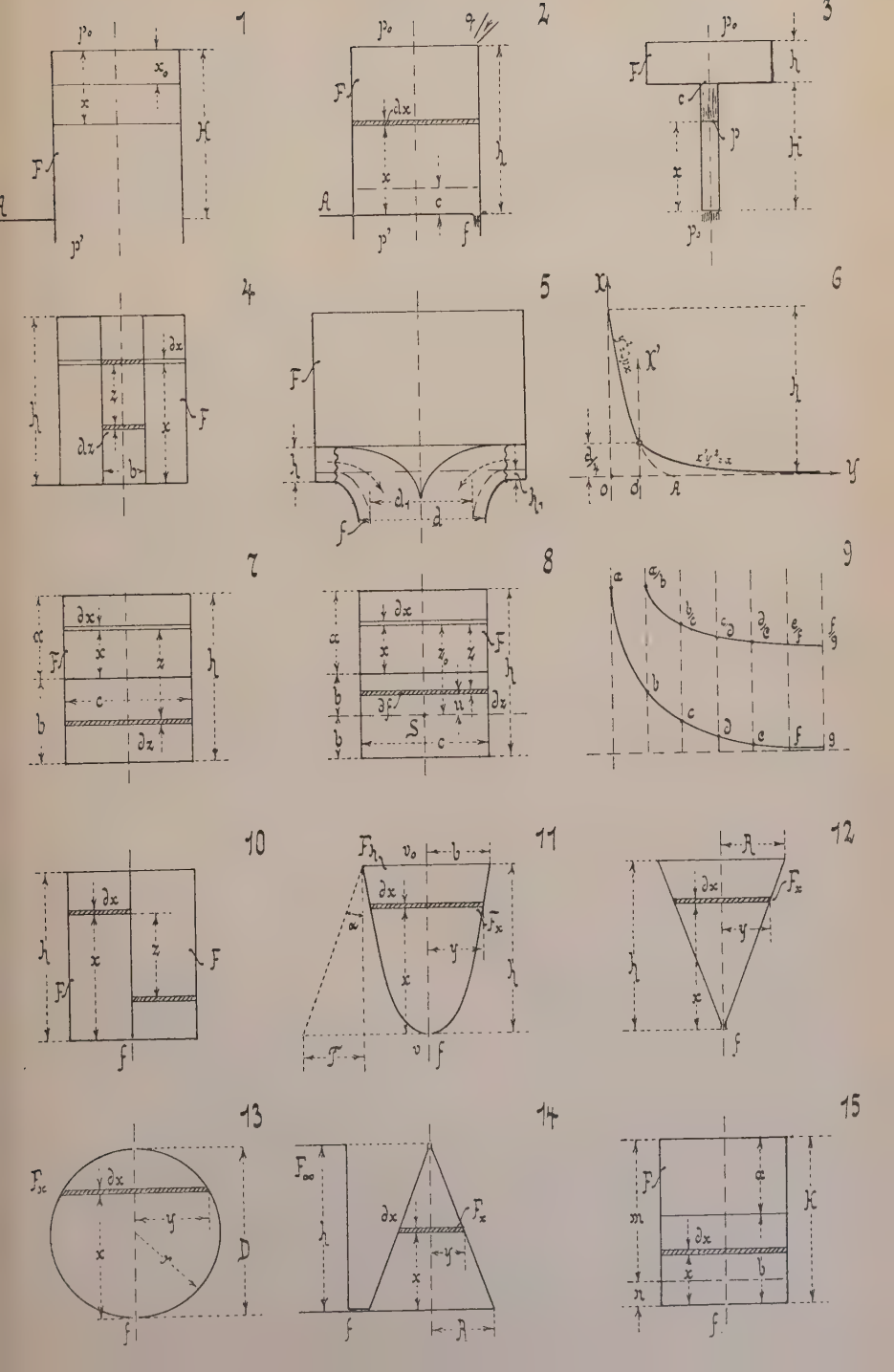
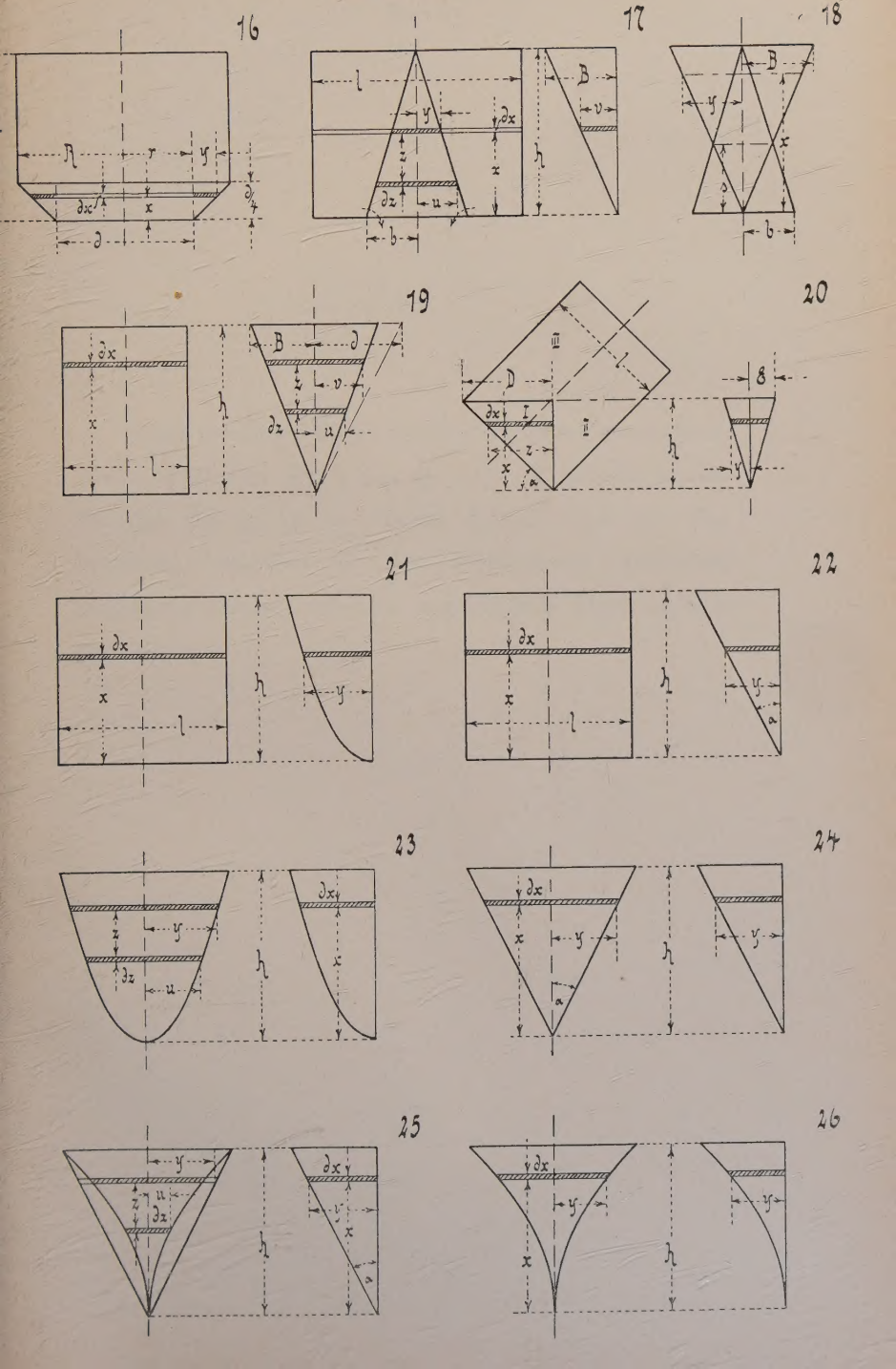


Fig. 16—26.



Auch an dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, Herrn Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen für die Anregung zu dieser Arbeit und für das Interesse, welches er der Ausführung derselben entgegengebracht, meinen ergebensten Dank auszusprechen.